MISSIONE 4
ISTRUZIONE
RICERCA

Progetto MATES
MATematica in EState per Tutti

LA CRESCITA DEL PENSIERO MATEMATICO

QUADERNO DI APPROFONDIMENTO

Giovannina Albano, Università di Salerno

Domenico Brunetto, Politecnico di Milano

Chiara Andrà, Università del Piemonte Orientale

Cristina Coppola, Università di Salerno

Maria Polo, Università di Cagliari

Finanziato dall'Unione europea NextGenerationEU
Ministero dell'Università e della Ricerca
Italiadomani Piano Nazionale di Ripresa e Resilienza
Università degli Studi di Milano Bicocca
Università degli Studi di Brescia
Università Cattolica del Sacro Cuore
Università degli Studi di Napoli Federico II

MISSIONE 4
ISTRUZIONE
RICERCA

Giovannina Albano, Domenico Brunetto, Chiara Andrà, Cristina Coppola, Maria Polo

La crescita del pensiero matematico

ISBN: DA INSERIRE

MATES, MATematica in EState per Tutti, è il nome dell'iniziativa realizzata all'interno del Progetto di Rilevante Interesse Nazione PRIN 2022 "Coming to terms not only with the pandemic. Mathematics learning loss in primary school: underlying factors and interventions" (Codice progetto 2022TWCJAS), finanziato dal Ministero dell'Università e della Ricerca.

Ulteriori informazioni su quanto è stato realizzato e quanto è incorso di realizzazione sono presenti sul sito https: progetto-mates.it

MISSIONE 4
ISTRUZIONE
RICERCA

Sommario

1. INTRODUZIONE

Il progetto MaTEs, acronimo che sta per “Matematica per Tutti in Estate”, prende avvio da alcuni risultati di ricerca, sviluppati soprattutto nel contesto anglosassone, sulla perdita di apprendimento durante la pausa estiva. Cos’è la perdita di apprendimento? E’ una misura della differenza tra quanto si sarebbe appreso a scuola, se fosse stata aperta, e quanto (non) si è appreso proprio perché la scuola era chiusa. Una misura analoga si può effettuare anche in contesti di ospedalizzazione prolungata, o di assenze prolungate da scuola per altri motivi.

In Italia la percezione più diffusa tra le insegnanti di scuola primaria riguardo all’estate è che i bambini tornino a settembre più maturi, “cresciuti”. Forse per tale ragione, le ricerche sulla perdita di apprendimento sono limitate. Tuttavia, questo fenomeno merita di essere indagato anche nel contesto italiano, perché colpisce soprattutto i bambini che si trovano in situazioni sociali svantaggiate, contribuendo ad allargare quel divario già esistente tra gruppi di individui che provengono da situazioni socio-economiche differenti.

La perdita di apprendimento non è solo un fenomeno cognitivo, ma coinvolge anche aspetti affettivi, come le attitudini verso le materie di apprendimento, e di socializzazione. Inoltre, gli effetti negativi di questo fenomeno possono manifestarsi in tempi lunghi, non sempre misurabili direttamente.

Il progetto MaTEs, quindi, riconosce come valida l’impressione generale degli insegnanti sul fatto che i bambini tornino a settembre maturati rispetto al giugno corrispondente, ma vuole formare i docenti specificamente su un fenomeno che colpisce i bambini più fragili, e fornire loro strumenti per sostenerli nel contrasto a tale fenomeno. Strumenti che possono essere di beneficio per tutti gli allievi e che possano anche sostenere policy efficaci nella direzione di formare cittadini competenti e pronti ad affrontare le sfide della vita quotidiana.

Nel concreto, la app del progetto MaTEs nasce come strumento per lavorare, in estate, sulla matematica. Perché la matematica? Per diverse ragioni: la prima, perché specificamente per la matematica spesso è più difficile per le famiglie attivare autonomamente azioni di recupero e sostegno dei propri figli, in assenza della scuola. La seconda, perché si conoscono le ricadute negative nel lungo periodo della mancanza di conoscenze matematiche adeguate, anche per quanto riguarda la scelta di carriere in ambito scientifico o ingegneristico, ma più in generale per la gestione delle finanze personali, che può sfociare in fenomeni di sovraindebitamento o di dipendenza da gioco d’azzardo. La terza ragione risiede nel fatto che molte ricerche sulla perdita di apprendimento sono state effettuate sulla matematica, quindi possiamo contare su un corpus di evidenze senza eguali, sulla base del quale costruire la nostra proposta concreta.

Il presente quaderno nasce quindi come breve e mai esaustivo compendio per comprendere i fondamenti di ricerca che hanno mosso le azioni del progetto MaTEs, iniziando a richiamare il curriculum di matematica nel prossimo capitolo e richiamando in quello successivo le ricerche in didattica della matematica che hanno ispirato la realizzazione della app. Viene, poi, presentata la app e quindi vengono forniti alcuni esempi di elaborati degli studenti, analizzati da noi ricercatori per aiutare l’insegnante a dare una sua propria interpretazione di quelli che saranno gli elaborati dei propri allievi. Infine, l’ultimo capitolo si concentra sulle implicazioni didattiche e a chiusura di questo lavoro i riferimenti bibliografici essenziali per dare una valenza scientifica a tutte le nostre considerazioni.

Il quaderno è dedicato a tutte le insegnanti che hanno a cuore l'apprendimento dei propri studenti e non smettono mai di sperimentare nuovi approcci affinché essi possano trarre il massimo dalla scuola. Buona lettura a tutti!

Per accedere all'app vai a https://progetto-mates.it/estate

2. QUALE MATEMATICA NELLA SCUOLA PRIMARIA?

I principi ispiratori che hanno mosso le azioni del progetto MaTEs, hanno a fondamento il curriculum di matematica che tende a realizzare una visione trasversale e a spirale dello sviluppo della matematica : per questo motivo pensiamo a curricula di matematica al plurale nell'ottica di una riduzione della frammentarietà che spesso rende sterile la matematica scolastica perché non facilita la costruzione di un ambiente di apprendimento fertile in cui le conoscenze matematiche vivano in interazione tra di loro.

Come si legge già nelle Indicazioni Nazionali del 2022 "La costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese; è un processo che comporta anche difficoltà linguistiche e che richiede un'acquisizione graduale del linguaggio matematico. Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola."

La definizione di "competenza/e" è sempre stato un tema molto caldo. Noi assumiamo una prospettiva che unifica il punto di vista della didattica generale con il punto di vista della didattica disciplinare.

In accordo a Pellerey (2004), assumiamo che "Una specifica competenza viene evidenziata dalla capacità di attivare (o mobilizzare) e integrare (o combinare) le risorse interne possedute (conoscenze, abilità, altre qualità personali) e quelle esterne disponibili (persone, documenti, strumenti informatici,…)". Questa definizione evidenzia quattro elementi chiave:

1. questa mobilizzazione si effettua in un contesto o situazione specifica e implica un intervento attivo da parte del soggetto
2. il compito da portare a termine o l'attività da svolgere in tale contesto caratterizza la competenza considerata
3. il riconoscimento sociale di una competenza implica la sua manifestazione in una molteplicità di contesti particolari (non basta una singola prestazione)
4. la capacità di mettere in moto e di coordinare le risorse interne possedute e quelle esterne disponibili per affrontare positivamente una tipologia di situazioni sfidanti. Qui l'accento è molteplice. Da un lato si mette in evidenza che una persona "competente" è quella che fa ricorso non solo alle proprie risorse interne, ma è in grado di riconoscere quando queste non sono sufficienti ed è in grado di ricorrere a risorse esterne. Dall'altro lato, l'esercizio di una competenza è attivata definibile a partire dalla tipologia di compiti che devono essere "sfidanti", vale a dire poco familiari e più o meno complessi. Tali compiti possono essere riferiti all'interno di una disciplina o avere un carattere più aperto. Da ultimo, va sottolineato anche il carattere personale del "mettere in moto" che richiama componenti motivazionale, sociali ed etiche.

Lo sviluppo di una competenza richiede di promuovere:

a) acquisizione di conoscenze (fatti, concetti, definizioni);

b) acquisizione di abilità (schemi di azione più o meno automatizzati);

c) consapevolezza della disponibilità di conoscenze e abilità per poterle utilizzare opportunamente (consapevolezza del "quando", "come" e "perché" usare le conoscenze e abilità possedute).

Alla definizione di competenza di Pellerey, fa eco la definizione di competenza matematica di Niss (2003) elaborata nell'ambito del progetto danese KOM Project, che è alla base dei test OCSE-PISA, secondo cui "La competenza (*competence* in inglese) matematica è la disponibilità consapevole di una persona ad agire in modo appropriato in risposta a ogni tipo di sfida matematica relativa a determinate situazioni". Tuttavia, Niss e il suo gruppo di ricerca si posero il problema della misurabilità della competenza. Per questo motivo, la competenza matematica è stata decomposta in capacità fondamentali in matematica e in qualche senso «misurabili», dove una capacità fondamentale in matematica (*competency* in inglese) è definita come "La disponibilità consapevole di una persona ad agire in modo appropriato in risposta a uno specifico tipo di sfida matematica in determinate situazioni". Niss e il suo gruppo hanno individuato capacità fondamentali principali in matematica divise in due cluster:

1. Porre e rispondere a domande *in* e *con* della matematica:

   1.1. Pensiero e ragionamento matematico
   1.2. Formulazione e risoluzione di problemi
   1.3. Modellizzazione
   1.4. Argomentazione

2. Capacità di trattare linguaggio e strumenti matematici

   2.2 Rappresentazione
   2.3 Uso del linguaggio simbolico e formale
   2.4 Comunicazione
   2.5 Uso di strumenti e sussidi

Naturalmente le otto capacità fondamentali non possono essere considerate completamente separate tra di loro

3. PRINCIPI TEORICI ALLA BASE DELLA PROGETTAZIONE

Nel presente capitolo proponiamo alcune riflessioni, provenienti dal mondo della ricerca in didattica della matematica, sugli aspetti non-cognitivi che sono coinvolti nei processi di apprendimento, sulla distinzione tra pensiero logico e pensiero narrativo e sulle implicazioni nei problemi in matematica, sulla modellizzazione e il problem solving, e sull'uso di disegni e di rappresentazioni nei processi di modellizzazione e problem solving.

3.1 ASPETTI AFFETTIVI NEI PROCESSI DI APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA

I processi di apprendimento e di insegnamento della matematica coinvolgono non solo aspetti cognitivi, ma inevitabilmente si intrecciano con emozioni, aspetti motivazionali e volitivi, interesse, attitudini, atteggiamenti, valori, norme e credenze che costituiscono gli aspetti affettivi e sono oggetto di numerose ricerche. Secondo Luis Radford, insignito della medaglia Hans Freudenthal nel 2011 dall'Unione Matematica Internazionale, non c'è matematica senza tali aspetti cognitivi e noi non saremmo nemmeno in grado di pensare senza provare al tempo stesso emozioni (Radford, 2015). Insomma, senza tutti questi aspetti affettivi, non ci sarebbe apprendimento.

Se ci fermiamo un attimo a pensare, arriviamo a concludere che gli aspetti non cognitivi siano davvero tantissimi ed è davvero difficile prenderli tutti in considerazione. Nel progetto MaTEs, abbiamo fatto una scelta e abbiamo deciso di concentrarci sugli atteggiamenti verso la matematica. Deci e Ryan (2000) hanno dimostrato correlazioni positive tra atteggiamenti positivi e risultati di apprendimento migliorati, nonché tra senso di autonomia e prestazioni in matematica. Questi risultati sono particolarmente rilevanti per il contesto del progetto MaTEs. Nei nostri studi, consideriamo gli atteggiamenti verso la matematica nella definizione data da due ricercatori italiani di fama mondiale: Rosetta Zan e Pietro Di Martino. Secondo tali studiosi, quando parliamo di atteggiamenti verso la matematica, parliamo di tre elementi fortemente intrecciati tra loro, ossia: (i) l'interesse verso la matematica, ossia il piacere che proviamo mentre stiamo risolvendo un problema di matematica, (ii) la competenza percepita, ovvero quanto ci sentiamo bravi nel fare ciò che stiamo facendo, e (iii) la disposizione emotiva, ossia ciò che proviamo mentre stiamo facendo matematica. Per quanto riguarda la disposizione emotiva ricordiamo che, secondo Buck (1999) e Power e Dalgleish (1997), le emozioni sono il risultato di una combinazione di riflessioni cognitive e risposte fisiologiche, poiché le sensazioni che si provano in una determinata situazione spingono a riflettere su ciò che si sta provando e a interpretare le emozioni a livello cognitivo. Per quanto riguarda la competenza percepita, ricordiamo che Merleau-Ponty (2002) sostiene che i pensieri non nascono da pensieri, ma da un "io posso". "Io posso" è un sentimento, non un pensiero: è il sentimento circa la propria possibilità di fare qualcosa, circa la propria capacità di contribuire a una discussione, di risolvere un problema. Di Martino e Zan (2010) hanno identificato l'"io posso" degli studenti nei resoconti narrativi del loro rapporto con la matematica durante gli anni scolastici e lo hanno chiamato competenza percepita. L'importanza della fiducia degli studenti nel proprio lavoro è stata riconosciuta: Bandura (1977) sostiene che l'autoefficacia di uno studente è un fattore determinante nel determinare se tenterà un determinato compito, quanto impegno ci metterà e quanto sarà resiliente quando si presenteranno delle difficoltà. Burton (2004) vede la fiducia come una confluenza di sentimenti legati alle convinzioni su se stessi e sulla propria efficacia, e Pierce e Stacey (2004) la definiscono come la percezione che si ha della propria capacità di ottenere buoni risultati e la sicurezza di poter gestire le difficoltà.

Durante il processo di risoluzione di un compito, uno studente può incontrare molteplici difficoltà che possono dipendere sia dalle sue caratteristiche individuali (come abilità, conoscenze, convinzioni e atteggiamenti) sia dalle caratteristiche specifiche del compito (come il testo o il contenuto matematico coinvolto). Questi aspetti possono influenzare la percezione del compito da parte dello studente e, di conseguenza, la sua difficoltà percepita (Spagnolo e Andrà, 2025). Riteniamo che la difficoltà percepita, quando uno studente è lasciato solo ad affrontare un compito matematico, sia un aspetto rilevante da tenere in considerazione e il quadro fornito da Spagnolo e Saccoletto (2023) funge da buona base. La questione della difficoltà soggettiva è stata esplorata negli ultimi 30 anni sotto vari aspetti (ad esempio, Eccles e Wigfield, 2020; Doz et al., 2023). Talvolta, la difficoltà percepita è stata considerata una forma di autoefficacia, sebbene questa connessione non sembri del tutto appropriata (Eccles & Wigfield, 2020). Tuttavia, sono stati definiti concetti correlati o sovrapposti, come la "sensazione di difficoltà", descritta come un'"esperienza metacognitiva che monitora l'elaborazione cognitiva mentre si svolge" (Efklides & Touroutoglou, 2010, p.172) e ha una "natura esperienziale". Doz et al. (2023) suggeriscono che la natura della "sensazione di difficoltà del compito" sia metacognitiva, derivante dal monitoraggio dell'elaborazione del compito in corso, e che la consapevolezza di questo processo influenzi l'autoregolazione, l'impegno, le emozioni e l'uso della strategia.

Infine, teniamo in considerazione anche i valori che emergono nella risoluzione dei problemi matematici, perché, come ci ricorda Bishop (1988), la matematica è tutt'altro che un prodotto completamente privo di valori (o di cultura). Seah (2005) sottolinea che la matematica è una disciplina plasmata dalla conoscenza collettiva di diverse culture, quindi la matematica insegnata e appresa a scuola è inevitabilmente aperta alle interazioni culturali e, di conseguenza, i valori plasmano le esperienze matematiche nelle culture in cui gli studenti sono immersi.

Esistono diverse classificazioni dei valori e nel nostro studio consideriamo sia i valori matematici che quelli non matematici. Lim ed Ernest (1997) hanno classificato i valori in tre diverse categorie: valori epistemologici, sociali, culturali e personali. I valori epistemologici sono legati agli aspetti teorici dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica, mentre i valori sociali e culturali si riferiscono alle responsabilità umane legate all'educazione matematica per la società. I valori personali sono valori che influenzano l'individuo o lo studente. Bishop (1988) ha classificato i valori insegnati nelle aule di matematica in tre categorie: valori matematici (ad esempio, "razionalismo" o "apertura"), valori educativi in matematica (ad esempio, essere efficienti nella scelta di una strategia) e valori educativi generali (come "onestà" o "buon comportamento").

I valori sono profonde "verità personali" o impegni cari agli individui, aiutano a motivare scelte a lungo termine e priorità a breve termine e sono altamente strutturati, formando sistemi di valori (De Bellis e Goldin, 2006). I valori sono qualità che consideriamo importanti per noi, quindi una forza motivante che ci spinge a ottenere ciò che desideriamo, e che sono socialmente mediati. I valori hanno una connotazione etica e morale (Seah, 2019). I valori si distinguono anche dalle convinzioni, poiché queste ultime sono ciò che un individuo considera vero, mentre le prime riflettono ciò che è considerato importante (Seah, 2019).

3.2 STORYTELLING E PROBLEMI-STORIA

Le ricerche in didattica della matematica spesso parlano di una “disaffezione” nei confronti della matematica e di un diffuso atteggiamento (nel senso visto nel paragrafo precedente) negativo verso la disciplina. Questo fenomeno è dovuto anche ad una visione della matematica come fatta solo di regole da imparare a memoria e applicare senza riuscire a dare loro un significato. Raccontare storie in classe, usare la metodologia dello storytelling in matematica, può essere un modo per costruire significati (Egan, 1986). Le storie sono una struttura molto potente per organizzare e trasmettere informazioni e per creare significato nelle nostre vite e nei contesti in cui viviamo (Green, 2004). In una storia i personaggi incontrano conflitti, crisi e cercano di risolverli. Ma soprattutto la caratteristica che distingue le storie da altri tipi di narrazione, come resoconti storici o rapporti scientifici, è che orientano i nostri sentimenti rispetto a ciò che viene raccontato (Egan, 2004, 2008). In altre parole, le storie ci fanno provare qualcosa. Il valore della storia nell'insegnamento sta proprio nel suo potere di coinvolgere le emozioni degli studenti e, insieme, la loro immaginazione rispetto ai contenuti del curriculum (Zazkis & Liljedahl, 2009).

Ci possono essere diversi tipi di storie per veicolare un concetto matematico. Ci sono storie che fanno da cornice o da sfondo, fornendo il contesto per un'attività matematica, storie che introducono un'attività matematica, ovvero che finiscono nel momento in cui si inizia a lavorare con la matematica. Ci sono storie che spiegano un determinato concetto, che possono essere usate per concetti percepiti come "difficili" o poco intuitivi da parte degli studenti. E ci sono storie "che pongono una domanda". Nella scuola primaria, i compiti di modellizzazione sono spesso introdotti, nei libri di testo, da "problemi a parole", che vogliono richiamare questo tipo di storie (Zazkis & Liljedahl, 2009). Purtroppo però spesso si tratta di "problemi" che sono stati spogliati da tutti quei dettagli narrativi che, se ben organizzati e presentati, servono proprio a coinvolgere e motivare gli studenti, perdendo così la loro efficacia nell'orientare i sentimenti di chi ascolta o legge. Dunque, se da una parte è ben noto che la contestualizzazione del problema matematico in situazioni concrete, famigliari e realistiche aiuta il bambino sia a livello di motivazione che a livello cognitivo, dall'altra, però, testi scarni e artificiosi, fintamente vicini alla realtà dei bambini non favoriscono la comprensione e il coinvolgimento, piuttosto favoriscono la ricerca di "scorciatoie cognitive" tramite una lettura selettiva del testo, basata solo sulla ricerca delle parole chiave (Zan, 2012). E questo non fa altro che confermare l'idea che la matematica sia un insieme di procedure da applicare, prive di senso. Zan (2011) suggerisce che il contesto della storia debba essere ricco e significativo per gli studenti e che le domande debbano nascere "nella" storia e non in modo artificiale "sulla storia", debbano essere di interesse per i protagonisti all'interno del racconto. Questo aspetto è anche in contrapposizione al fatto che, nella maggior parte dei casi, i problemi che i bambini si trovano a dover risolvere sono "eteroposti" nel senso che, a differenza di quanto accade nella vita reale, chi pone il problema è diverso da chi lo deve risolvere. Inoltre, nella comprensione di una storia entra in gioco anche un tipo di pensiero che Bruner (1986) chiama *pensiero narrativo*, contrapposto al pensiero *paradigmatico* o *logico-scientifico*. Il pensiero narrativo è quello in grado di interpretare i fatti umani, le persone, le loro intenzioni, i loro sentimenti e produce racconti plausibili e ragionevoli. Il pensiero logico-scientifico categorizza la realtà, riconosce l'ordine delle cose e produce argomentazioni dimostrative. Sebbene i due tipi di pensiero siano irriducibili l'uno all'altro, come sostenuto da Bruner, questo non significa che il pensiero narrativo debba essere da ostacolo per l'apprendimento e l'insegnamento della matematica, anzi la complementarietà dei due tipi di pensiero e la forte presenza del pensiero narrativo nella vita quotidiana fa sì che esso possa fare da supporto allo sviluppo del pensiero logico (Zan, 2012, a,b). Ebbene, in quelli che Rosetta Zan chiama "problemi a righe", ovvero quei problemi con le caratteristiche appena descritte, questa complementarietà può funzionare bene, i due tipi di pensiero possono andare l'uno in supporto dell'altro, a favore della comprensione dei concetti matematici.

3.3 MODELLIZZAZIONE MATEMATICA E PROBLEM-SOLVING

La modellizzazione matematica può essere descritta come il processo di stabilire e sfruttare una connessione tra realtà e matematica. Più precisamente, la modellizzazione matematica implica la traduzione di una situazione del mondo reale in termini matematici, lavorando all'interno della matematica e quindi interpretando e convalidando i risultati nel contesto del mondo reale (si vedano Blum e Borromeo Ferri, 2009). La modellizzazione in matematica è sempre stata un argomento di ricerca in didattica della matematica, fin dagli anni Settanta. La modellizzazione in matematica ha ricevuto un crescente interesse e la sua importanza è stata ulteriormente sottolineata nella ricerca sul ruolo della matematica nell'affrontare questioni di sostenibilità, cambiamento climatico, emergenze sociali, così come è stato sottolineato da Alf Coles (2023), il quale ha sostenuto la necessità di lezioni di matematica più connesse al mondo reale, in particolare alle questioni socio-ecologiche legate al cambiamento climatico.

Un modo comunemente adottato per concettualizzare il processo di modellazione è il ciclo di modellazione (Blum, 2015), che descrive la modellazione come una sequenza di sette passaggi, ovvero un insieme di fasi interconnesse tra realtà e matematica. Le attività di modellizzazione partono in genere da una situazione reale, che deve essere innanzitutto compresa e strutturata (fasi 1 e 2). Questo porta alla costruzione di un modello di situazione e successivamente di un modello reale, in cui gli aspetti rilevanti della situazione vengono selezionati, semplificati e idealizzati. Il modello reale viene quindi matematizzato (fase 3), producendo un modello matematico che può essere esplorato utilizzando strumenti e metodi matematici. I risultati matematici ottenuti lavorando matematicamente (fase 4) vengono infine interpretati (fase 5) e validati (fase 6) rispetto alla situazione originale, e infine presentati (fase 7) tornando alla situazione reale. La ricerca ha dimostrato che questo processo è raramente lineare nella pratica: gli studenti spesso si spostano avanti e indietro tra le fasi, omettono fasi o creano scorciatoie (Blum, 2015).

L'analisi descrittiva dei processi di soluzione degli studenti nell'ambito delle attività di modellizzazione matematica ha identificato sottoprocessi chiave e competenze corrispondenti, tra i quali la comprensione (fase 1 del ciclo di Blum) è un punto cruciale (Cevikbas et al., 2022). In un problema matematico, il processo di comprensione preliminare è riconosciuto come inevitabile sia da Blum (2015) nella sua elaborazione sul ciclo di modellizzazione, sia da Zan (2011) nelle sue considerazioni sui problemi narrativi matematici. Tuttavia, esiste il rischio che il pensiero narrativo si allontani da quello matematico e che gli studenti o si fermino a un livello narrativo e non siano in grado di applicare gli strumenti matematici necessari per risolvere il problema, oppure si immergano nel mondo matematico ma non siano in grado di dare un senso ai risultati (Zan, 2011).

3.4 RAPPRESENTAZIONI

Quando gli studenti si trovano ad affrontare un problema in matematica, che come abbiamo visto contiene in una qualche misura elementi narrativi, essi potrebbero basare il proprio processo di risoluzione su una rappresentazione del problema, che si fonda sulla sua narrazione. Nel problema verbale, infatti, ci sono informazioni rilevanti per la sua rappresentazione, così come ci sono informazioni rilevanti per la sua soluzione e "il punto è che i dati di cui un bambino ha bisogno per rappresentare il problema non sono necessariamente quelli che deve usare nella soluzione" (Zan, 2011, p. 6). Il pensiero narrativo (Bruner, 1986) ci aiuta a dare un senso ai problemi matematici e a rappresentarne la storia. È fondamentale che le informazioni rilevanti per la soluzione siano allineate con la struttura narrativa e che le informazioni rilevanti per la rappresentazione siano allineate logicamente. Inoltre, le disposizioni emotive, la competenza percepita, la difficoltà del compito e i valori sono sollecitati all'interno della struttura narrativa del problema matematico e si intrecciano con la fase di soluzione.

Se utilizziamo il ciclo di modellizzazione di Blum come riferimento, notiamo che durante la fase di comprensione (ossia, la fase 1), gli studenti possono generare disegni. Nell'ambito della didattica della matematica, la ricerca sulla rappresentazione grafica ha ricevuto attenzione, soprattutto negli studi di Roth (2015), che ci spinge persino a considerare il disegno e il movimento come forme di pensiero (matematico).

Bassi e Brunetto (2025) sottolineano che il ruolo dei disegni evolve durante tutto il ciclo di modellizzazione. Durante la comprensione e la strutturazione (fasi 1, 2), gli studenti possono produrre disegni situazionali per rappresentare la situazione e identificare gli oggetti rilevanti. Nella matematizzazione (fase 3), gli elementi situazionali svaniscono man mano che quantità e relazioni rilevanti per la soluzione vengono chiarite, passando da un modello reale a uno matematico. Nella fase di elaborazione matematica, i disegni matematici possono prevalere, evidenziando la struttura, supportando il ragionamento e semplificando il problema. Infine, nell'interpretazione e nella convalida (5, 6), i disegni aiutano a verificare i risultati collegando i risultati matematici alla situazione originale. Di conseguenza, i disegni possono essere interpretati non solo come strumenti cognitivi a supporto delle fasi di modellazione precedenti, ma anche come modalità per strutturare e comunicare i risultati, contribuendo a mantenere la coerenza con il contesto reale e a rivolgersi a un pubblico di non esperti. In questo senso, diverse tipologie di disegni possono supportare diverse sotto-competenze della fase di presentazione, mediando tra rigore matematico e costruzione di senso narrativo. I disegni, sia matematici che situazionali, possono fungere da ponte tra realtà e matematica e, nonostante una quantità relativamente limitata di ricerche su questo argomento, alcuni studi mostrano una correlazione positiva tra l'uso dei disegni e le prestazioni di modellazione matematica (Rellensmann et al., 2017; Bassi & Brunetto, 2025). In Rellensmann et al. (2017), la conoscenza strategica del disegno è positivamente correlata alle prestazioni di modellazione degli studenti, e questa relazione è mediata dal tipo e dall'accuratezza dei disegni generati. Mentre l'accuratezza dei disegni situazionali è indirettamente correlata alle prestazioni, esiste una forte relazione tra l'accuratezza dei disegni matematici e le prestazioni. D'altra parte, Bassi e Brunetto (2025) mostrano che tale distinzione può essere superata quando gli studenti sono coinvolti in attività di modellizzazione più complesse.

In precedenti ricerche, Rellensmann e colleghi (2017) hanno identificato due tipi di disegni:

1. *disegno situazionale*, che illustra visivamente gli oggetti descritti nel problema così come appaiono nella realtà; questo tipo di disegno comporta un basso grado di astrazione;
2. *disegno matematico*, che include solo gli elementi del problema rilevanti per la soluzione, con oggetti semplificati fino alle loro proprietà matematiche essenziali; questo tipo di disegno è più astratto, in quanto esteriorizza il modello matematico stesso.

Val la pena osservare che i disegni degli studenti non ricadono necessariamente in una sola categoria, ma a volte presentano elementi che mostrano l’evoluzione da una tipologia verso un’altra, mostrando quindi anche l’evoluzione del pensiero e del processo di modellizzazione.

4. L'APP MATES COME DISPOSITIVO DIDATTICO

L'app MATES propone attività matematiche sotto forma di problemi-storia, pensate per essere svolte durante il periodo estivo con il supporto fondamentale di un adulto di riferimento. In questo contesto, la narrazione assume un ruolo centrale: non è un semplice contorno motivazionale, ma costituisce la struttura stessa dell'attività matematica, contribuendo a dare senso ai problemi e a sostenere l'impegno delle alunne e degli alunni.

Le storie e le sfide preparatorie costituiscono nel loro insieme un dispositivo didattico coerente, in cui la matematica emerge da situazioni significative, si sviluppa attraverso l'esplorazione e il confronto, e si consolida tramite l'argomentazione.

Le attività dell'app, incluse le sfide preparatorie, non sono pensate come esercizi di ripasso, ma come strumenti per mantenere attivo il pensiero matematico durante l'estate, favorendo un apprendimento significativo e duraturo. In relazione al fenomeno del learning loss, questo tipo di attività risulta particolarmente rilevante, poiché la perdita di apprendimento riguarda soprattutto ragionamento, problem solving e capacità di argomentazione, più che le conoscenze di base.

È importante sottolineare che l'uso dell'app non è pensato come completamente autonomo da parte del bambino, ma come un'esperienza mediata da un adulto di riferimento (genitore o altro adulto). Infatti, l'app è un mezzo nelle mani dell'adulto che serve sia a presentare il problema-storia e le singole attività (attraverso testo, audio e immagini), sia per raccogliere gli elaborati delle alunne e degli alunni. Il ruolo dell'adulto è cruciale in questo processo, poiché consente di sostenere il bambino nell'interpretazione del compito, nella verbalizzazione del ragionamento e nella riflessione finale, rendendo possibile un uso dell'app che non è solo esecutivo, ma profondamente formativo.

4.1 CARATTERISTICHE DEI PROBLEMI-STORIA

I problemi-storia dell'app condividono alcune caratteristiche progettuali comuni. In primo luogo, prevedono libertà di esplorazione: le alunne e gli alunni possono intraprendere percorsi diversi e giungere a soluzioni differenti, superando l'idea di un'unica risposta corretta. In secondo luogo, richiedono esplicitamente argomentazione, spostando l'attenzione dal risultato al processo e alle ragioni delle scelte effettuate.

Un ulteriore elemento fondamentale è l'uso di rappresentazioni, in particolare del disegno, che viene richiesto fin dalle prime fasi dell'attività come modalità per comprendere e rielaborare la storia. Le attività, inoltre, sono progettate in modo da favorire l'emergere di più modelli matematici possibili mettendo in discussione l'idea di una matematica unica e assoluta.

Infine, i problemi-storia integrano la dimensione matematica con quella sociale ed etica, poiché le decisioni dei personaggi e le soluzioni proposte richiamano valori come equità, giustizia e collaborazione.

Nel loro insieme, le storie dell'app costituiscono un dispositivo didattico che mira a sviluppare competenze matematiche profonde, in particolare problem solving, argomentazione e modellizzazione, attraverso attività significative e contestualizzate. In relazione al fenomeno del learning loss, tali attività risultano particolarmente rilevanti, poiché la perdita di apprendimento in matematica riguarda soprattutto queste competenze, più che le conoscenze di base.

4.2 LE SFIDE PREPARATORIE

Prima dell'avvio delle storie dell'app, vengono proposte alcune sfide preparatorie. Queste attività sono di transizione, cioè hanno la funzione di introdurre gradualmente le alunne e gli alunni al tipo di lavoro richiesto nell'app, favorendo un primo coinvolgimento e attivando modalità di ragionamento coerenti con quelle che saranno poi richieste nelle storie.

Le sfide si presentano anch'esse sotto forma di brevi problemi contestualizzati, con una forte componente narrativa e con la possibilità di seguire percorsi risolutivi diversi.

- **Sfida 1 – L'ape Ada**

  Il problema richiede di individuare un percorso tra diversi fiori tale da raccogliere esattamente 20 granuli di polline. L'attività introduce l'idea che uno stesso obiettivo (ottenere 20) può essere raggiunto attraverso combinazioni diverse di numeri, favorendo l'esplorazione, il calcolo mentale e la riflessione sulle proprietà delle operazioni. È inoltre presente un vincolo (non tornare sullo stesso fiore) che stimola il ragionamento strategico.

- **Sfida 2 – Il portafoglio di Emmy**

  In questa situazione, l'alunno deve ricostruire una quantità iniziale a partire dalle spese effettuate e dal denaro rimasto. Il problema introduce il passaggio tra operazioni (somma e sottrazione) e la necessità di rappresentare mentalmente o graficamente la situazione, superando possibili fraintendimenti legati al linguaggio ("restano").

- **Sfida 3 – Le caramelle di Sheila**

  La sfida propone una situazione di crescita (ogni giorno il doppio del precedente) e richiede di determinare le quantità distribuite nei diversi giorni. Il problema coinvolge sia il ragionamento moltiplicativo (raddoppio) sia quello additivo (somma delle quantità), invitando a costruire strategie anche attraverso semplificazioni.

Queste sfide condividono alcune caratteristiche fondamentali con le storie dell'app: ammettono più strategie, valorizzano l'esplorazione e incoraggiano l'uso di rappresentazioni. Inoltre, prevedono il coinvolgimento attivo dell'adulto, che è invitato a sostenere il bambino senza fornire direttamente la soluzione, ma guidandolo nella riflessione.

4.3 STRUTTURA DELLE STORIE

Ogni storia è articolata in una sequenza di attività (task) che accompagnano progressivamente l'alunna e l'alunno dalla comprensione alla risoluzione. Tipicamente, le attività iniziano con la richiesta di disegnare la storia appena ascoltata, per favorire la costruzione di una rappresentazione della situazione; proseguono con domande che richiedono di risolvere il problema, spiegare il proprio ragionamento, comprendere o valutare le scelte dei personaggi; e si concludono con momenti di riflessione e argomentazione.

Ogni storia si articola nelle seguenti fasi:

1. **Introduzione narrativa**

Presentazione di personaggi e contesto attraverso testo e audio, che permette di costruire una prima comprensione della situazione.

2. **Rappresentazione iniziale (disegno)**

   Il bambino è invitato a disegnare la storia, attivando una rappresentazione personale della situazione.

3. **Esplorazione**

   Prime domande che guidano l'osservazione, il confronto e la formulazione di ipotesi.

4. **Strutturazione e modellizzazione**

   Le attività richiedono di individuare relazioni tra quantità e di costruire strategie di soluzione.

5. **Apertura a più soluzioni**

   Alcuni task ammettono più risposte possibili, favorendo flessibilità e confronto tra strategie.

6. **Argomentazione**

   Il bambino è chiamato a spiegare e giustificare il proprio ragionamento, spesso attraverso registrazioni audio.

7. **Rielaborazione**

   L'introduzione di nuove informazioni o vincoli richiede di rivedere e affinare le strategie.

8. **Documentazione e riflessione metacognitiva**

   Ogni attività si conclude con il caricamento degli elaborati (disegno e audio) e con una riflessione su gradimento, riuscita e difficoltà.

Questa struttura riflette il processo di modellizzazione matematica, che implica il passaggio dalla realtà alla matematica e ritorno, attraverso fasi di comprensione, rappresentazione, matematizzazione e interpretazione.

4.4 LE STORIE DELL'APP

L'app MATES propone sei storie, che affrontano contenuti matematici diversi (aritmetica, geometria, relazioni, frazioni), sempre all'interno di contesti narrativi significativi, ma condividono una struttura comune basata su progressione, esplorazione e argomentazione.

Storia 1: Le caramelle di Nonna Adele

La storia introduce situazioni di scelta e distribuzione di oggetti (caramelle), coinvolgendo le quattro operazioni con numeri naturali entro il 100.

La storia si sviluppa attorno alla preparazione di una festa, in cui i bambini devono gestire sacchetti di caramelle di gusti diversi.

I task guidano progressivamente le alunne e gli alunni:

- inizialmente viene richiesto di rappresentare la situazione (sacchetti, gusti, quantità);
- successivamente si affrontano problemi di scelta e confronto (da quale sacchetto conviene pescare);

- si introducono poi situazioni di addizione e gestione del denaro (somma dei risparmi);
- il problema evolve verso una prima forma di modellizzazione: interpretare un volantino con informazioni incomplete e ricostruire i prezzi;
- infine, si richiede di prendere decisioni su come utilizzare una certa quantità di denaro, ammettendo più soluzioni possibili.

La storia mostra chiaramente come si passi da situazioni concrete a forme di ragionamento più strutturate, fino alla costruzione di strategie. Quindi le attività sono finalizzate allo sviluppo di competenze di problem solving e di argomentazione, fin dal primo approccio, mettendo in discussione l'idea che ogni problema abbia una sola soluzione.

Storia 2: Naima e il parcheggio

In questa storia, gli alunni lavorano su aspetti spaziali e organizzativi, legati alla disposizione di oggetti nello spazio. Questa storia è centrata su una situazione quotidiana: una mattina di commissioni in città.

I task sviluppano:

- la rappresentazione spaziale (posizione di supermercato, giardini, macchine);
- il calcolo del tempo (somma di ore e minuti in diverse fasi della giornata);
- la capacità di stimare e confrontare quantità (costo del parcheggio rispetto al tempo trascorso);
- il ragionamento logico su vincoli (individuare una macchina in base a condizioni: non è la prima, non è l'ultima, ha due macchine davanti).

La progressione mostra come la matematica emerga naturalmente da una situazione realistica e familiare. Il contesto è familiare e permette di sviluppare competenze di rappresentazione e di organizzazione spaziale, già introdotte nei primi anni di scuola.

Storia 3: La cascina degli animali

La narrazione coinvolge situazioni legate al mondo degli animali e introduce elementi di tipo pre-algebrico e aritmetico. La storia si svolge in una cascina e introduce un problema classico reinterpretato in chiave narrativa: quello delle teste e zampe.

I task accompagnano gli alunni in un percorso di crescente formalizzazione:

- inizialmente si costruisce la situazione attraverso il disegno (pulcini e conigli visti dal basso);
- si introduce un primo vincolo logico (17 zampe non è possibile → numero pari);
- si sviluppa il ragionamento su relazioni numeriche (18 zampe non è multiplo di 4 → presenza di pulcini);
- si esplorano tutte le combinazioni possibili (diverse soluzioni);
- infine, si restringe il campo utilizzando una nuova informazione (numero di animali), arrivando alla soluzione.

La storia è un esempio chiaro di passaggio da esplorazione a modellizzazione. Le attività mirano a sviluppare competenze trasversali di comunicazione e rappresentazione, oltre che di problem solving.

Storia 4: Il regno di Regiomonte

In questa storia vengono affrontati contenuti geometrici e topologici attraverso contesti ludico-esperienziali (percorsi, labirinti), familiari agli alunni fin dalla scuola dell'infanzia.

Questa storia introduce un contesto narrativo fantastico, in cui un principe deve gestire ponti tra isole per recuperare pezzi della corona.

I task sviluppano competenze legate alla teoria dei grafi (in forma intuitiva):

- rappresentazione della situazione (isole, torri, ponti);
- ricerca di percorsi che attraversino tutti i ponti una sola volta;
- confronto tra diverse possibilità;
- scoperta di situazioni in cui il percorso è possibile o impossibile.

La struttura favorisce l'esplorazione e il tentativo, valorizzando anche l'errore come parte del processo. L'obiettivo è sviluppare competenze di orientamento e rappresentazione dello spazio.

Storia 5: Le barrette di cioccolata

La storia introduce problemi legati alla misura e all'equivalenza (ad esempio il confronto tra una barretta 4×4 e una 2×8), e conduce progressivamente all'idea di frazione come rapporto tra numeri naturali. La storia prende avvio da una situazione familiare (una festa di compleanno) e introduce progressivamente concetti matematici più complessi.

I task includono:

- rappresentazione delle barrette;
- confronto tra forme diverse ma quantità uguali (4×4 e 2×8);
- divisione equa di quantità (5 barrette tra 6 persone);
- riflessione sulla quantità ottenuta (introduzione implicita alle frazioni);
- problemi di interpretazione linguistica e calcolo (numero totale di barrette acquistate).

La storia evidenzia il passaggio da intuizioni visive a concetti più formali. Le attività sono fortemente connesse alla modellizzazione e al problem solving.

Storia 6: Beremiz, l'uomo che sapeva contare

Questa storia, tratta da un racconto narrativo, propone una situazione di divisione di risorse che ammette diverse soluzioni matematiche. La storia di Beremiz introduce una situazione di condivisione e ricompensa che ammette diverse soluzioni matematiche.

I task guidano a:

- rappresentare la situazione iniziale (pane, persone, divisione);
- proporre una prima soluzione;
- confrontarsi con una soluzione alternativa (7-1) e comprenderne la logica;
- riflettere su una soluzione diversa (4-4);
- scegliere e argomentare la soluzione preferita tra più modelli possibili.

Questa storia è particolarmente significativa perché rende esplicita la coesistenza di più modelli matematici e il ruolo dei valori nelle scelte. Gli alunni sono chiamati a comprendere, confrontare e giustificare le diverse possibilità, mettendo in gioco sia competenze matematiche (divisione, frazioni) sia riflessioni su valori come equità e giustizia.

5. GLI ELABORATI DEGLI STUDENTI: ALCUNI ESEMPI

Nelle pagine che seguono, presentiamo alcuni elaborati realizzati dagli studenti che hanno svolto le attività con la app del progetto MaTEs e li analizziamo alla luce dei principi teorici che ci hanno ispirati nella realizzazione del percorso. Questa sezione può offrire spunti interpretativi per l'insegnante che desideri utilizzare la app come strumento didattico per supportare l'apprendimento dei propri studenti durante l'estate.

5.1 UNA STORIA AMBIENTATA IN UN DESERTO LONTANO

La storia che coinvolge i bambini è tratta da un libro, dal titolo "L'uomo che sapeva contare", ed è stata adattata come segue.

> Beremiz e Ali sono due amici, che sono in viaggio nel deserto. Si stanno avvicinando a un piccolo villaggio, quando scorgono un viandante ricoperto di cenci che sembra ferito. Beremiz e Ali si avvicinano per soccorrerlo e l'uomo racconta loro la storia della sua disavventura.
> Si chiama Salem Nasair ed è Sceicco di Baghdad. Pochi giorni prima, la sua carovana è stata attaccata e rapinata da una banda. Egli è riuscito miracolosamente a salvarsi nascondendosi nel deserto.
> Lo Sceicco chiede a Beremiz e Ali:
> «Non avete, per caso, qualcosa da mangiare? Sto morendo di fame.»
> «Ho tre pagnotte», risponde Ali.
> «Io ne ho cinque» dice Beremiz, l'uomo che sa contare.
> «Allora» dice lo Sceicco «vi scongiuro di dividere le vostre pagnotte con me. E vi propongo uno scambio ragionevole. Vi darò, per il pane, otto monete d'oro non appena giungeremo a Baghdad».
> «Abbiamo 8 giorni di viaggio» dice Ali «Dobbiamo consumare solo una pagnotta al giorno: ce la divideremo in tre».
> E così fanno il primo giorno, e poi il secondo,…fino all'ottavo.

Gli studenti, dopo aver letto la storia fino a questo punto, sono invitati a realizzare il primo disegno. La storia, poi, continua:

> All'ottavo giorno, entrano a Baghdad e incontrano il potente visir Ibrahim Maluf, che riconosce lo Sceicco e gli chiede: «Cosa ti è capitato, amico mio? Come mai arrivi qui a Baghdad così mal ridotto, in compagnia di questi due stranieri?»
> Il povero Sceicco gli narra nei dettagli quanto è accaduto in viaggio, lodando Beremiz e Ali.
> «Ricompensa subito questi due stranieri» ordina il Visir. Prende dalla borsa otto monete d'oro e le dà allo Sceicco.

Agli studenti viene, dunque, rivolta la domanda: "Se tu fossi lo Sceicco, come divideresti le monete tra Beremiz e Ali?" Questa rappresenta la seconda attività svolta nell'ambito della storia di Ali e Beremiz. La storia continua ancora:

> Lo Sceicco dice, rivolgendosi a Beremiz: «Ecco cinque monete d'oro per i tuoi cinque pani». Poi dice ad Ali: «E tre a te, per le tue tre pagnotte».
> Però Beremiz solleva un'obiezione: «Perdonami, Sceicco! Ma questa suddivisione, che pure sembra semplice, non è matematicamente giusta. Dal momento che ho dato cinque pagnotte, devo ricevere sette monete. Il mio amico che ha ceduto tre pagnotte, deve riceverne soltanto una».

> Tocca a te: Prova a comprendere la divisione proposta da Beremiz (7-1) e illustra, nel modo che preferisci, qual è stato, secondo te, il suo ragionamento.

Dopo aver svolto la terza attività, gli studenti leggono ancora un altro pezzo della storia e il fulcro delle nostre analisi è sulla parte che segue:

> Dopo aver spiegato la sua logica, Beremiz aggiunge: «Tuttavia, propongo di prendere 4 monete ciascuno».
>
> Scegli tra le tre possibili divisioni (5-3; 7-1; 4-4) quella che preferisci. Spiega perché.

La maggioranza degli studenti dice di preferire, tra le tre opzioni, la divisione 4-4 e riportiamo, in quanto segue, la trascrizione di alcuni dei commenti orali che ci hanno condiviso, accompagnati dalla nostra interpretazione.

Iniziamo con un gruppo di bambini che ha detto di non aver apprezzato questa attività. essi rappresentano una minoranza, perché più dell'80% degli studenti ha detto averla amata molto, ma ci sembra significativo soffermarci sugli elaborati di questi bambini innanzitutto.

Alice:	La mia soluzione mi sembra equa come... mi sembra equa come divisione, perché entrambi hanno dato qualcosa, quindi... entrambi devono ricevere la stessa... la stessa quantità di monete. Non ho trovato altre divisioni possibili e queste mi vanno bene.
Barbara:	Ho scelto questa soluzione perché si sono aiutati a vicenda, rinunciando a tutto ciò che avevano.
Carlo:	Ho escluso 7-1 e 5-3, perché 5-3 non mi sembrava molto equa, mentre 7-1 potrebbe funzionare, ma entrambi sono stati gentili, quindi ho voluto dividere in parti uguali.
Davide:	Ho scelto la divisione equa 4-4, perché secondo me è la più bella. Alla fine sceglierei anche quella 5-3, che premia ciascuno per il contributo dato.
Elisa:	Ho escluso le altre due perché... ehm... la prima perché quella che ho scelto non si basa sulla matematica, ma sull'amicizia. E no, non ne ho un'altra diversa... di... operazione.
Fabio:	Secondo me, la risposta più corretta è 7-1, perché matematicamente è più corretta.
Giacomo:	Ho escluso le altre due, perché non erano parti uguali e c'era il rischio che litigassero.

Possiamo innanzitutto osservare che l'aggettivo "giusto" abbia due connotazioni: una riguarda la correttezza matematica, l'altra l'equità a livello etico. I bambini usano l'aggettivo "giusto" e dal contesto possiamo dedurre che intendano "giusto" o "uguale", con una connotazione etica. Emergono, quindi, i valori dalle parole dei bambini e ciò che emerge non è il valore matematico di rigore e correttezza, bensì il valore morale di equità: l'idea che sia Beremiz sia Ali abbiano dato qualcosa (Alice), che abbiano dato tutto ciò che avevano (Barbara), che siano stati gentili (Carlo) e che la divisione 4-4 sia la più bella (Davide). Giacomo vuole evitare il rischio che litighino. Elisa spiega che la soluzione 4-4 è quella basata sull'amicizia, contrapponendola volutamente a quella basata sulla matematica.

Potremmo chiederci perché questi bambini, cui l'attività non è piaciuta, abbiano dato risposte così ricche e la risposta che possiamo offrire è che in molte classi ci sono alcuni studenti che, pur non amando la materia, riescono bene in essa. Per fortuna, coloro che non amano la matematica in seconda primaria sono pochi. Andiamo quindi a vedere alcuni dei numerosi esempi di bambini che hanno apprezzato molto l'attività.

Anna:	Ho scelto 4-4 perché entrambi si sono sacrificati, quindi vorrei pagarli in parti uguali.
Bruno:	Anch'io, con un mio amico, divideremmo equamente.
Cinzia:	Ho scelto 4-4 perché ci sono 2 amici e in questo modo ognuno ha 4 monete. Ho escluso 7-1 perché non lo capivo; ho escluso 5-3 perché altrimenti uno avrebbe avuto più soldi e l'altro meno.
Daniele:	Non voglio che litighino, quindi darei 4 monete a ciascuno di loro.

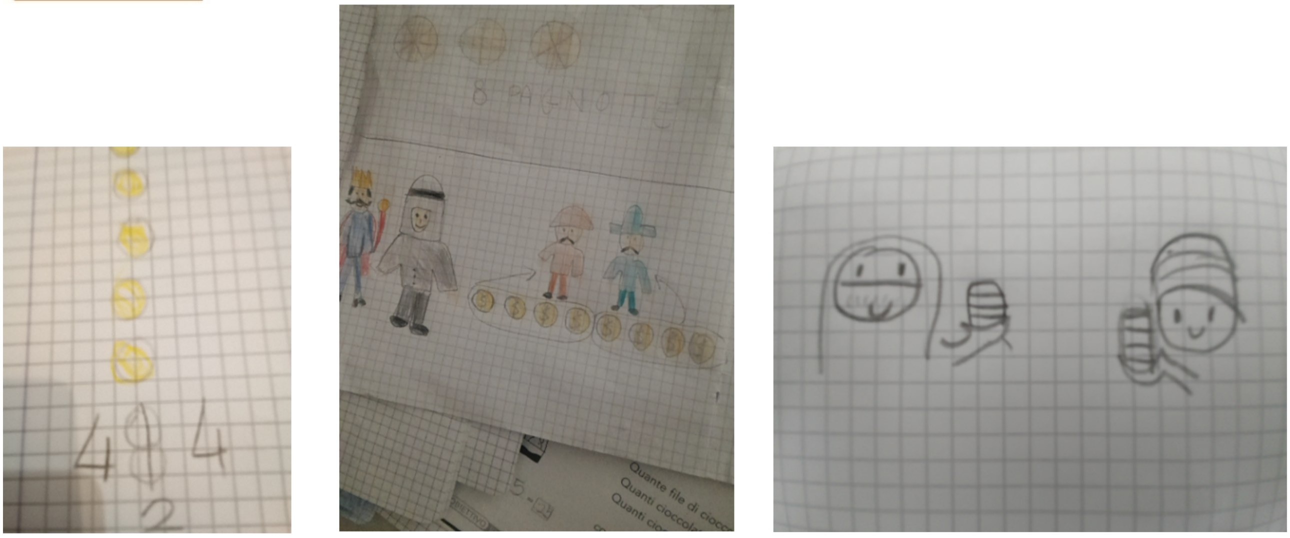
Elena:	Ho scelto 4-4 perché non volevo né più né meno, quindi ho optato per una divisione equa.
Franco:	Ho pensato 4-4 perché mi hanno insegnato a dividere sempre le cose in parti uguali.
Giorgia:	Per me è giusto fare 4 e 4 così sono entrambi contenti.
Ilaria:	Dividere in parti uguali è la cosa giusta da fare, perché non importa chi mette di più o chi di meno. È la stessa cosa che faremmo io e la mia amica, perché lei porta 8 e io 2 e insieme... facciamo 10.
Laura:	Ho escluso le altre due opzioni, perché volevo che Beremiz e Ali avessero la stessa quantità e non litigassero più, e non ne avrei scelta un'altra.
Marco:	Mi è piaciuta l'opzione in cui hanno diviso le monete 4 e 4, perché ha aiutato entrambi, non solo uno, non solo Beremiz, non solo Ali, ma si sono aiutati a vicenda.
Nora:	Non possono esserci uno in più e uno in meno, quindi preferisco 4-4, le monete sono uguali, quindi chi ha meno monete, questo perché entrambi hanno fatto delle buone azioni e non uno in più e uno in meno, perché entrambi hanno fatto una buona azione.
Olivia:	Anch'io sono generosa e mi piace dividere equamente.

Nel protocollo di Elena, notiamo che l'aggettivo "pari" è usato nel senso comune di "equo" e non in quello matematico (numeri divisibili per 2), evidenziando la differenza di significato tra il linguaggio quotidiano e quello matematico. Anche nel protocollo di Franco, lo studente usa il verbo "dividere", che nel senso comune significa "dividere in parti uguali", riferendosi quindi alla sua conoscenza del mondo. Un'osservazione simile può essere fatta per il protocollo di Ilaria. Notiamo, nel complesso, che la maggioranza ha preferito la divisione 4-4, ma ci sono studenti, che offrono punti di vista diversi:

Paolo:	Beh, io preferisco 4-4, ma quello giusto è 1 perché è più matematico.
Roberta:	Pensavo che la divisione dovesse essere 5-3, perché ogni pagnotta vale 1 moneta.
Samuele:	Avrei diviso 7 e 1, perché Beremiz ha diviso più pagnotte.
Tania:	Ho escluso 7 e 1, perché c'è troppa differenza; ho escluso 4 e 4, perché Beremiz ha dato 2 pagnotte in più di Ali, mi sembra più giusto dare 5 e 3.

Nel resoconto di Samuele, notiamo l'uso del verbo "dividere" in un senso non rigorosamente matematico, ma piuttosto approssimativo, come a dire: se ci sono più pagnotte, allora ci sono più monete.

Spesso è possibile osservare una corrispondenza tra le argomentazioni verbali dei bambini e i loro disegni. Tra i bambini che optano per la divisione 4-4, è possibile identificare specifiche categorie di disegni che corrispondono a categorie di risposte, e alcuni esempi sono mostrati nella Figura 5.



(a) (b) (c)

Figura 1 – *Alcuni disegni di bambini che supportano la preferenza per la divisione 4-4*

La scelta dell'opzione 4-4 da parte di alcuni bambini riflette una sottintesa enfasi sulle relazioni interpersonali e sull'importanza che attribuiscono all'amicizia (Figura 5a, così come le parole di Elisa, Bruno, Cinzia, Ilaria e Olivia). La preferenza dei bambini per l'opzione 4-4 è spesso motivata da un senso di equità e dalla percezione di una distribuzione equa (Figura 5b e le parole di Alice, Barbara, Carlo, Davide, Anna, Elena e Nora). Alcuni altri bambini optano per una divisione 4-4 per evitare di scontentare una delle due parti (Figura 5c e le parole di Giacomo, Daniele e Laura).

Leggendo i protocolli, notiamo anche che alcuni bambini, pur riconoscendo la correttezza della soluzione 7-1, scelgono la distribuzione 4-4 perché entrambe le parti hanno contribuito al meglio delle loro possibilità. Anche il disegno in Figura 6 mostra che lo studente ha compreso il senso matematico della storia: Ali ha mangiato 8 pezzi di pane su 9 (colorati in giallo) e ne ha lasciato uno a S. Beremiz ha mangiato 8 pezzi di pane su 15 (arancioni) e ne ha lasciati 7 a S. Carlo, con le sue parole, riconosce che 7-1 "potrebbe funzionare", ma il suo riconoscimento che "entrambi sono stati gentili" lo porta a optare per la divisione 4-4.

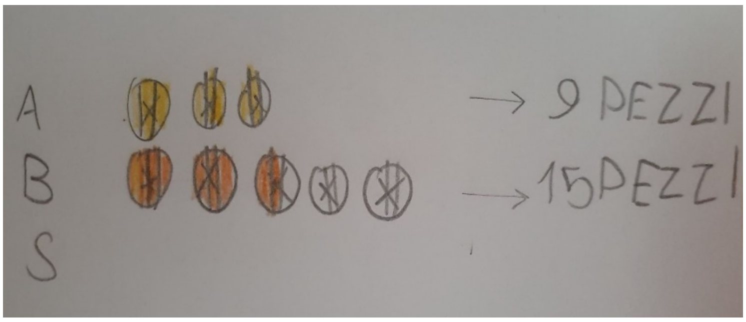


Figura 2 – *Uno dei disegni da cui si può dedurre che gli studenti hanno compreso il senso della divisione 7-1*

Per concludere, possiamo dire che questa attività con l'app, basata sulla storia di Ali e Beremiz, ha generalmente favorito atteggiamenti positivi verso la matematica, poiché molti partecipanti l'hanno apprezzata. Secondo la letteratura esistente, questo migliora l'apprendimento e, infatti, molti studenti che hanno gradito l'attività hanno anche fornito risposte dettagliate e ponderate sul perché preferissero un modello rispetto agli altri due. Dalle parole degli studenti emergono valori come l'amicizia, l'equità, l'importanza di dare tutto ciò che si può dare, l'evitare le discussioni. Non si tratta di valori matematici, bensì di valori sociali che hanno un significato per gli studenti e sono centrali nella loro vita. Secondo la categorizzazione dei valori di Bishop (1988), il coinvolgimento degli studenti nelle attività dell'app web consente l'emergere sia dei loro valori educativi generali (ad esempio, equità, amicizia, pace) sia di valori matematici (ad esempio, la possibilità di avere molteplici soluzioni a un dato problema). Gli studenti hanno avuto l'opportunità di confrontare le diverse soluzioni presentate dai protagonisti della storia, comprendere i presupposti (non necessariamente matematici o matematicamente corretti) su cui si basavano e scegliere la soluzione preferita in base ai propri valori. Il coinvolgimento degli studenti in questo processo, fondamentale per promuovere competenze chiave come il pensiero critico e la capacità decisionale, costituisce a nostro avviso il vero successo dell'attività. È importante sottolineare che lo storytelling ha giocato un ruolo chiave, in quanto ha permesso di collegare un problema matematico alla vita dei bambini, consentendo alla rappresentazione del problema di supportare il loro processo di risoluzione.

Per quanto riguarda la difficoltà del compito, una piccola percentuale di studenti lo ha trovato difficile, mentre la maggioranza lo ha trovato facile. In particolare, anche coloro che lo hanno trovato difficile lo hanno completato e in alcuni casi hanno fornito resoconti dettagliati: un esempio è Cinzia, che dichiara di non aver capito perché 7-1 dovesse essere valido, ma che comunque ha proseguito e ha portato a termine il compito con la sua soluzione.

MISSIONE 4
ISTRUZIONE
RICERCA

BIBLIOGRAFIA

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: toward a unifying theory of behavioural change. *Psychological Review, 84*, 191-215.

Bassi, C., & Brunetto, D. (2025). Shared drawings in a mathematical modelling activity: An exploratory study. *The Journal of Mathematical Behavior, 78*, 101234.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Kluwer.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?. In: *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp. 73-96). Cham: Springer International Publishing.

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt. *Journal of mathematical modelling and application, 1*(1), 45-58.

Bruner J. (1986). *Actual Minds, Possible Worlds*. Cambridge: Harvard University Press

Buck, R. (1999). The Biological Affects: A Typology. *Psychological Review*, 106, 301-336. https://doi.org/10.1037/0033-295X.106.2.301

Burton, L. L. (2004). *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics* (Vol. 34). Springer Science & Business Media.

Cevikbas, M., Kaiser, G. & Schukajlow, S. (2022). A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: state-of-the-art developments in conceptualizing, measuring, and fostering. *Educational Studies in Mathematics* 109, 205–236. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10104-6

Coles, A. (2023). Teaching in the new climatic regime: steps to a socio-ecology of mathematics education. In: M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel & M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 17-34). Haifa.

De Bellis, V. A., & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in mathematics, 63*(2), 131-147.

Deci, E., & Ryan, R. (2000). The 'what' and 'why' of goal pursuits: human needs and the self-determination of behavior. *Psychological Inquiry, 11*(4), 227–268.

Di Martino, P. & Zan, R. (2010). Me and maths: towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), 27-48.

Eccles, J. S., & Wigfield, A. (2020). From expectancy-value theory to situated expectancy-value theory: A developmental, social cognitive, and sociocultural perspective on motivation. *Contemporary Educational Psychology, 61*, Article 101859. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2020.101859

Efklides, A., Touroutoglou, A. (2010). Prospective Memory Failure and the Metacognitive Experienceof “Blank in the Mind”. In: Efklides, A., Misailidi, P. (eds) Trends and Prospects in Metacognition Research. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6546-2_6

Egan, O. (1986). The concept of belief in cognitive theory. In *Annals of theoretical psychology* (pp. 315-350). Boston, MA: Springer US.

Egan, T. M., Yang, B., & Bartlett, K. R. (2004). The effects of organizational learning culture and job satisfaction on motivation to transfer learning and turnover intention. *Human resource development quarterly, 15*(3), 279-301.

Egan, J. (2008). *Relationship marketing: Exploring relational strategies in marketing.* Pearson education.

Green Jr, S. E. (2004). A rhetorical theory of diffusion. *Academy of management review, 29*(4), 653-669.

Lim, C. S., & Ernest, P. (1997). Values in mathematics education: What is planned and what is espoused? *Paper presented at the British Society for Research into Learning Mathematics day conferences*, Nottingham, England.

Merleau-Ponty, M. (2002). *Phenomenology of Perception* (Colin Smith, Trans.; 2nd ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203994610

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 116–124). Hellenic Mathematical Society.

Pellerey (2004). *Le competenze individuali e il portfolio*. Rizzoli.

Pierce, R., & Stacey, K. (2004). A framework for monitoring progress and planning teaching toward the effective use of computer algebra systems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(1), 59–93.

Power, M. & Dalgleish, T. (1997). *Cognition and Emotion From Order to Disorder*. Hove: Psychology Press. ISBN 0-86377-738-4.

Radford, L. (2015). Of love, frustration, and mathematics: A Cultural-historical approach to emotions in mathematics teaching and learning. In B. Pepin & B. Rösken-Winter (Eds.), *From beliefs and affect to dynamic systems: (exploring) a mosaic of relationships and interactions* (pp. 25-49). NY: Springer. Advances in Mathematics Education series.

Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students’ mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics, 95*, 53–78. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1

Roth, W. M. (2015). Excess of graphical thinking: Movement, mathematics and flow. *For the Learning of Mathematics, 35*(1), 2-7.

Seah, W. T. (2005). Negotiating about Perceived Value Differences in Mathematics Teaching: The Case of Immigrant Teachers in Australia. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 145-152.Zan, R. (2011). The crucial role of narrative thought in understanding story problems. *Current state of research on mathematical beliefs XVI*, 287-305.

Seah, W. T. (2019). Values in mathematics education: Its conative nature, and how it can be developed. *Research in Mathematical Education*, 22(2), 99-121.

Spagnolo, C. & Andrà, C. (2025). Perceived difficulty of a mathematical task: do in-service and pre-service teachers have a common view? In M. Bosch, G. Bolondi, S. Carreira, C. Spagnolo, & M. Gaidoschik (Eds.), Proceedings of the Fourteenth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME14), (pp. 1343-1350). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

Spagnolo, C., & Saccoletto, S. (2023). How students view the difficulty of mathematical tasks: Factors that influence their perceptions. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1498–1506). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Zan, R. (2012a). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. Parte I. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. Vol.35 A N.2, 107-126.

Zan, R. (2012b). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. Parte II. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. Vol.35 A N.4, 437-467.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2009). *Teaching Mathematics as Storytelling*. Brill.